Gruppentheorie

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.math.uni.wroc.pl/∼dosaj/GGTWien/dyd/Course.html
Dienstag, 12:45–13:30
Seminarraum 11 Oskar-Morgenstern-Platz 1 2.Stock

Blatt 11

Fundamentalgruppe von Graphen

Ein *Graph* Γ besteht aus zwei Mengen:
$E = E(\Gamma)$ (die *Ecken* von Γ)
$K = K(\Gamma)$ (die *orientierten Kanten* von Γ) und den Abbildungen

$$I\colon K \to E \times E\colon k \mapsto (i(k), t(k))$$

und

$$^{-}\colon K \to K\colon k \mapsto \overline{k},$$

mit den Eigenschaften

1. $k \neq \overline{k}$, für alle $k \in K$,
2. $\overline{\overline{k}} = k$, für alle $k \in K$,
3. $i(\overline{k}) = t(k)$, für alle $k \in K$.

Ein *Weg* w der *Länge* $|w| = n \geqslant 0$ in Γ ist eine Folge $w = (k_1, k_2, \ldots, w_n)$ von Kanten $k_i \in K$ mit $t(k_i) = i(k_{i+1})$, für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Die Knoten $i(w) := i(k_1)$ und $t(w) := t(k_n)$, heißen *Anfangs-* und *Endpunkt* von w.

Sind $w = (k_1, \ldots, k_n)$ und $w' = (k'_1, \ldots, k'_m)$ zwei Wege mit $t(w) = i(w')$ dann definieren wir das *Produkt* (oder die *Konkatenation*) von w und w' als den Weg $w \cdot w' := (k_1, \ldots, k_n, k'_1, \ldots, k'_m)$.

(1) Zeige, daß diese Operation assoziativ ist. Was is das Neutralelement?

Wir sagen, daß die Wege w und w' *elementar homotop* sind, falls $w = (k_1, \ldots, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n)$ und $w = (k_1, \ldots, k_i, k, \overline{k}, k_{i+1}, \ldots, k_n)$, für eine Kante k. Wir sagen, daß die Wege w und w' *homotop* sind und schreiben $w \sim w'$, falls eine Folge $w = w_1, w_2, \ldots, w_k = w'$ von Wegen existiert, so das w_i und w_{i+1} elementar homotop sind für $1 \leqslant i \leqslant k1$. Wir bezeichnen die Homotopieklasse von w mit $[w]$, d.h. $[w] = \{w' \mid w' \sim w\}$.

(2) Zeige, daß $[w_1 \cdot w_2] = [w'_1 \cdot w'_2]$ falls $w_1 \sim w'_1$ und $w_2 \sim w'_2$.

Sei $u_0 \in E(\Gamma)$ eine Ecke. Die *Fundamentalgruppe von* Γ *relativ der Basisecke* u_0 ist definiert als die Menge

$$\pi_1(\Gamma, u_0) = \{[w] \mid w \text{ ist ein Weg mit } i(w) = t(w) = u_0\},$$

mit der Operation $[w] \cdot [w'] = [w \cdot w']$.

(3) Zeige, daß $(\pi_1(\Gamma, u_0), \cdot)$ eine Gruppe ist.

(4) Sei Γ eines zussamenhängend Graph, und u_0, u'_0 zwei Ecken. Zeige, daß $\pi_1(\Gamma, u_0)$ und $\pi_1(\Gamma, u'_0)$ isomorph sind.

(5) Zeige, daß die Fundementalgruppe eines Graphen frei ist.

Hinweis: Betrachte einen Spannbaum T in Γ. Die Fundamentalgruppe von Γ ist frei über der Menge von Kanten in $\Gamma - T$.

Ein *Graphenmorphimus* f von einem Graphen Γ zu einem Graphen Γ' ist ein Paar (f_E, f_K) von Abbildungen $f_E \colon E(\Gamma) \to E(\Gamma')$ und $f_K \colon K(\Gamma) \to K(\Gamma')$, so daß $f_K(\overline{k}) = \overline{f_K(k)}$ und $i(f_K(k)) = f_E(i(k))$ für alle $k \in K(\Gamma)$. (Wir werden die Abbildungen f_E und f_K meist einfach mit f bezeichnen.)

(6) Zeige, daß ein Graphenmorphismus $f \colon \Gamma \to \Gamma'$ induziert ein Gruppenmorphismus $f_* \colon \pi_1(\Gamma, u_0) \to \pi_1(\Gamma', f(u_0))$.

Wir nennen einen Morphismus $f \colon \Gamma \to \Gamma'$ *lokal injektiv*, falls für alle $k \neq k' \in K(\Gamma)$ mit $i(k) = i(k')$ gilt $f(k) \neq f(k')$.

(7) Zeige, daß $f_* \colon \pi_1(\Gamma, u_0) \to \pi_1(\Gamma', f(u_0))$ injektiv ist für jeder lokal injektive $f \colon \Gamma \to \Gamma'$.

Wir nennen einen Morphismus $f \colon \Gamma \to \Gamma'$ *lokal surjektiv*, falls für alle $e \in E(\Gamma)$ und $k' \in K(\Gamma')$ mit $i(k') = f(e)$ ein $k \in K(\Gamma)$ mit $i(k) = e$ existiert, so daß $f(k) = k'$. Ein surjektiver, lokal surjektiver und lokal injektiver Morphismus $f \colon \Gamma \to \Gamma'$ heißt *Überlagerung.*

(8) Zeige, daß eine freie Gruppe F_n eine Untergruppe der F_2 ist, für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Hinweis: Finde entsprechende Überlagerung einer Rose.